

## CONTROL DEL 'MODO DE APROXIMACIÓN' EN SISTEMAS DE ESTRUCTURA VARIABLE

R. MANTZ<sup>1</sup>, P. PULESTON<sup>2</sup>, H. DE BATTISTA<sup>3</sup>, F. VALENCIAGA<sup>4</sup>, F. BIANCHI<sup>5</sup>

LEICI, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata (UNLP)

CC91, 1900 La Plata, Argentina.

Tel-Fax: (54) (221) 425 9306

Email: [mantz@venus.fisica.unlp.edu.ar](mailto:mantz@venus.fisica.unlp.edu.ar)

**Palabras Claves:** sistemas de estructura variable, modo deslizante, planificación de trayectorias, sistemas diferencialmente planos.

### Resumen:

Se aborda el problema del comportamiento dinámico de sistemas de estructura variable en el "modo de aproximación". Se emplean conceptos de planificación de trayectorias de sistemas diferencialmente planos con el objetivo de alcanzar la superficie de control en un punto donde puede establecerse el modo deslizante. La estrategia presentada reduce y/o evita los cambios de estructura previos al establecimiento del modo deslizante. Además, se incrementa el dominio de condiciones iniciales en el que se puede trabajar en forma segura. Se propone un control adicional por modo deslizante para el seguimiento de la trayectoria planificada, asegurando la operación en forma robusta desde su condición inicial.

### 1. Introducción

El control de sistemas de estructura variable por modo deslizante (MD) permite obtener sistemas robustos ante incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas. Además, las estrategias de MD reducen el orden del sistema y son fácilmente implementables. Su limitación más importante es el chattering asociado a la frecuencia de conmutación finita de los actuadores. Sin embargo, esta limitación suele no ser importante en sistemas con actuadores electrónicos, sistemas en los cuales estas estrategias de control pueden ser una opción de alta performance. (Utkin, 1992,1993, Slotin y Li 1991)

Los sistemas operando en modo deslizante consisten en un grupo de subsistemas continuos y funciones de conmutación que determinan un conjunto de subespacios, cuya intersección se conoce como superficie de deslizamiento. Según el sistema se encuentre a uno u

otro lado de cada subespacio, el control toma uno de los valores posibles, lo que da lugar a una acción de control discontinua. La idea básica es forzar a las variables de estado a alcanzar la superficie de deslizamiento y luego, mediante una adecuada conmutación del control, obligarlas a evolucionar sobre ella sin abandonarla. Una vez establecido este modo de funcionamiento, la superficie de deslizamiento impone la nueva dinámica del sistema. (Bühler, 1986; Sira-Ramirez,1987)

El análisis dinámico del sistema hasta que alcanza el régimen deslizante se conoce como modo de operación de aproximación o de alcance (MA) y ha sido objeto de varios trabajos. Durante el MA el sistema opera a lazo abierto y determinadas condiciones iniciales pueden dar lugar a que el sistema alcance la superficie en puntos en los cuales el modo deslizante no puede establecerse. Esta situación puede dar lugar a transitorios que deterioran por completo la performance buscada. (Bühler, 1986, Hung *et al.*,1993)

El presente trabajo propone el planteo de estrategias de planificación de trayectorias de sistemas planos (Fliess *et al.*, 1995; Sira-Ramirez, 1996; Sira-Ramirez y Fliess, 1998) para alcanzar la superficie, en forma

<sup>1</sup> Prof. Tit., Fac. Ing. UNLP. Inv. CIC.

<sup>2</sup> Prof. Adj., Fac. Ing. UNLP. Investigador. CONICET

<sup>2</sup> Prof. Adj., Fac. Ing. UNLP. Becario CONICET.

<sup>4</sup> Prof. Adj., Fac. Ing. UNLP. Becario FOMEC.

<sup>5</sup> Ay. Dip, Fac. Ing. UNLP. Becario UNLP.

controlada, en un punto donde se verifiquen las condiciones de establecimiento del modo deslizante. Este aspecto no es contemplado en otras propuestas en las que sólo se regula la velocidad de convergencia a la superficie de control (Hung *et al.*, 1993). El control de seguimiento de la trayectoria planificada es obtenido a partir de una superficie de deslizamiento adicional. Así, la estrategia formulada permite ampliar el rango seguro de trabajo, operando en todo momento en MD.

## 2. Sistemas diferencialmente planos

Se dice que  $\phi$  es una función diferencial de  $x$  si:

$$\phi = \phi(x, \dot{x}, \dots, x^{(\beta)}) \quad (1)$$

siendo  $\beta$  un entero finito. Si  $x$  satisface la ecuación diferencial

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2)$$

con

$$x^T = (x_1, \dots, x_n) \in R^n,$$

$$u^T = (u_1, \dots, u_m) \in R^m,$$

y  $f^T = (f_1, \dots, f_n)$  una función regular de  $x$  y de  $u$ , y el rango del jacobiano de  $f$  respecto de  $u$  es maximal (es decir  $m$ ), entonces la función diferencial (1) de  $x$  toma la forma particular:

$$\phi = \phi(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(\beta-1)}) \quad (3)$$

es decir es función de los estados  $x$ , del control  $u$  y de un número finito de derivadas del control.

Se dice que un sistema es diferencialmente plano cuando existen  $m$  salidas (reales o ficticias), llamadas salidas planas, que son funciones diferenciales del estado del sistema (es decir, funciones del estado, del control y de un número finito de sus derivadas):

$$y_i = h_i(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(\hat{a}-1)}) ; \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4)$$

tales que el inverso del sistema no admite dinámica alguna. Las señales  $y = (y_1, \dots, y_m)$  también se denominan salidas linealizantes.

Un sistema plano tiene la propiedad adicional de que los estados, las salidas originales y las entradas pueden ser expresadas como funciones diferenciales de las

salidas planas (Fliess *et al.*, 1995; Sira-Ramirez, 1996; Sira-Ramirez y Fliess, 1998), es decir:

$$x = A(y, \dot{y}, \dots, y^{(\alpha)}) \quad (5)$$

$$u = B(y, \dot{y}, \dots, y^{(\alpha+1)}) \quad (6)$$

con  $\alpha$  entero.

Un sistema linealizable exactamente por transformación de coordenadas y redefinición estática de las variables de control:

$$z = \Phi(x) \quad (7)$$

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v \quad (8)$$

con:

$$z_i^{(\mu_i)} = v_i \quad \sum_i \mu_i = n \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (9)$$

$$z = (z_1, \dots, z_1^{(\mu_1-1)}, z_2, \dots, z_2^{(\mu_2-1)}, \dots, z_m, \dots, z_m^{(\mu_m-1)}) \quad (10)$$

es diferencialmente plano y las salidas planas están constituidas, en este caso, por las variables  $z_i$ :

$$y_i = z_i ; \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (11)$$

Los estados integradores son:

$$y_{ij} = y_i^{(j)} = z_i^{(j)} ; \quad j = 0, 1, \dots, \mu_i - 1 \quad (12)$$

Luego todas las variables resultan funciones del vector  $y$ :

$$v = (z_1^{(\mu_1)}, z_2^{(\mu_2)}, \dots, z_m^{(\mu_m)}) \quad (13)$$

$$x = \Phi^{-1}(z_1, \dots, z_1^{(\mu_1-1)}, z_2, \dots, z_2^{(\mu_2-1)}, \dots, z_m, \dots, z_m^{(\mu_m-1)}) \quad (14)$$

$$u = \alpha(\Phi^{-1}(z)) + \beta(\Phi^{-1}(z))v \quad (15)$$

## 3. Planificación de trayectorias

La propiedad de planitud, es decir, la propiedad de poder expresar al estado del sistema y sus entradas como funciones de la salida plana y de un número finito de sus derivadas sin necesidad de integrar ecuaciones diferenciales, resulta extremadamente útil para plantear estrategias de planificación de trayectorias. En efecto, a partir de una trayectoria de la salida plana, las trayectorias del estado y del control se deducen inmediatamente (Fliess *et al.*, 1995).

Resulta apropiado remarcar también, que el problema de regulación de una salida de fase no mínima puede ser resuelto mediante un método indirecto de regulación de la salida plana (Sira-Ramirez y Fliess, 1998).

La estrategia de control por seguimiento de trayectorias tiene por objetivo alcanzar un estado final  $x(T)$  a partir de un estado inicial  $x(t_0)$  en forma controlada a lo largo de una trayectoria preestablecida.

Si el sistema (2) tiene salidas planas  $y$ , resulta

$$x=A(y, \dot{y}, \dots, y^{(\alpha)}) \quad (16)$$

$$u=B(y, \dot{y}, \dots, y^{(\alpha+1)}) \quad (17)$$

Tanto las condiciones iniciales  $x(t_0)$ , como las finales  $x(T)$  establecen relaciones sobre las derivadas de las salidas planas  $y$ , hasta un orden  $\alpha$

$$x(t_0)=A(y(t_0), \dot{y}(t_0), \dots, y^{(\alpha)}(t_0)) \quad (18)$$

$$x(T)=A(y(T), \dot{y}(T), \dots, y^{(\alpha)}(T)) \quad (19)$$

Luego es suficiente con encontrar una curva en el espacio de las  $y$ , con  $t \in [t_0, T]$ ,  $t \rightarrow y(t)$  tal que se satisfagan las restricciones anteriores. Siempre es conveniente utilizar el conocimiento de la física del sistema a los efectos de prescribir una trayectoria interpolante adecuada.

Planificada la trayectoria  $y_d(t)$ , el control en lazo abierto  $t \rightarrow u(t)$  que transfiere el sistema desde el estado  $x(t_0)$  al estado  $x(T)$  se obtiene, sin integración alguna, en forma explícita mediante:

$$t \rightarrow u(t)=B(y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(\alpha+1)}(t)) \quad (20)$$

El seguimiento asintótico de una trayectoria de referencia  $t \rightarrow y(t)$  se obtiene mediante un lazo sobre la dinámica de  $y$  dada por

$$y_i^{(\mu_i)} = v_i; \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (21)$$

haciendo que el control externo satisfaga la siguiente expresión:

$$v_i = y_{di}^{(\mu_i)} - \sum_{j=0}^{\mu_i-1} \delta_{i,j} (y_i^{(j)} - y_{di}^{(j)}) \quad (22)$$

donde los coeficientes  $\delta_{i,j}$  deben ser elegidos para asegurar la convergencia hacia la trayectoria

#### 4. Control de trayectoria en el MA por MD

Cuando se aborda el control de un sistema por MD, deben contemplarse dos modos de operación, el de aproximación y el deslizante. Cuando los estados alcanzan la superficie de deslizamiento, su permanencia sobre la misma, es decir el MD, sólo se establece si se verifica: (Bühler, 1986)

$$u_{imin} \leq u_{ieq} \leq u_{imax}; \quad i=1, 2, \dots, m \quad (23)$$

siendo  $u_{imin}$  y  $u_{imax}$  las acciones de control extremas disponibles, y  $u_{ieq}$  el control equivalente.

De no verificarse (23) las trayectorias cruzan la superficie de control y el sistema opera nuevamente a lazo abierto. La alternancia de estructuras antes del establecimiento del MD, es causante de comportamientos transitorios que pueden estar lejos de la performance buscada (Bühler, 1986; Hung *et al.*, 1993). El aumento de la acción de control disponible tiene un doble efecto, por una parte, aumenta el dominio sobre la superficie en el cual puede establecerse el MD, mientras que por otra, en el MA una mayor acción de control puede hacer evolucionar las trayectorias hacia un punto de la superficie en el cual no se verifique (23), aún con el citado aumento del dominio del MD. Además, siempre existen restricciones de orden práctico para aumentar la acción de control.

En la literatura pueden encontrarse distintas propuestas para regular la velocidad de convergencia hacia la superficie de control (Hung *et al.*, 1993) entre las más conocidas, se pueden citar:

- 1) ley de velocidad de aproximación constante

$$\dot{s} = -Q \operatorname{sgn}(s) \quad (24)$$

donde la ganancia matricial  $Q$  es diagonal de elementos positivos.

- 2) ley de velocidad de aproximación con término constante más término proporcional

$$\dot{s} = -Q \operatorname{sgn}(s) - Ks \quad (25)$$

con las ganancias  $Q$  y  $K$  matrices diagonal de elementos positivos,

- 3) ley de velocidad de aproximación a una potencia  $\alpha$

$$\dot{s}_i = -k_i |s_i|^\alpha \operatorname{sgn}(s) \quad 0 < \alpha < 1 \quad (26)$$

Si bien las distintas estrategias para regular la velocidad de convergencia influyen en la dinámica del sistema en el MA, ninguna contempla restricciones del

control, es decir que consideran que el dominio del MD es infinito. En este trabajo se evalúa el empleo de planificación de trayectorias para que el sistema alcance en forma controlada la superficie en un punto dentro del dominio restringido de la operación en MD. Luego, a partir de la medida del estado inicial; del conocimiento de un punto sobre la superficie de control donde se verifique (23); y de la física del problema, es posible definir las trayectorias deseadas  $y_d(t)$  y controlar el MA basándose en (22). Como en general la planificación va a implicar menores requerimientos de la acción de control disponible, ya que el problema que se ataca está asociado al exceso de control en el MA, se propone que el seguimiento de trayectoria en el MA sea realizado a través de un control por MD sobre la superficie:

$$\sigma_1 = \sum_{j=0}^{u_i-1} \delta_{i,j} (y_j^{(j)} - y_{dj}^{(j)}) = 0 \quad (27)$$

Teniendo presente (17), la condición necesaria y suficiente para operar en MD sobre la superficie de control  $\sigma_1=0$  es:

$$u_{imin} \leq u_i = b_i(y, \dot{y}, \dots, y^{(\alpha+1)}) \leq u_{imax} \quad (28)$$

Luego, de acuerdo a la nueva propuesta, el sistema opera siempre en MD, primero sobre la superficie de control  $\sigma_1$  y posteriormente sobre  $\sigma_2$ . El modo deslizante sobre la primera superficie asegura el alcance y el establecimiento del modo deslizante sobre la segunda superficie  $\sigma_2$ . Siendo ésta, la superficie en la cual se vuelcan las especificaciones de diseño referidas a dinámica, rechazo de perturbaciones, robustez a incertidumbres, máxima eficiencia, etc. La estrategia propuesta permite, para valores determinados de  $u_{imin}$  y  $u_{imax}$ , ampliar la región de condiciones iniciales que asegura que el sistema una vez alcanzada la superficie opere en MD sobre  $\sigma_2$ , evitando transitorios no deseados debidos al MA.

**5. Ejemplo.** Las ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= x_1 - \theta \end{aligned} \quad (29)$$

siendo

$$f(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1+x_1^2)x_2 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix}, \quad (30)$$

describen el modelo de un cuerpo rígido (con inercia  $J$ ) controlado mediante un par  $u$ , correspondiente a la

formulación de Gibbs.  $x_1$  es un ángulo de orientación y  $x_2$  es la velocidad angular medida sobre un eje oblicuo al eje principal. El objetivo del control es regular  $x_1$  a un valor constante  $\theta$ , es decir  $y=0$ .

El MD no puede establecerse sobre la superficie  $x_1-\theta=0$  ya que la salida es de grado relativo igual a 2 y por lo tanto su derivada no depende explícitamente del control. Para garantizar el objetivo del control se puede proponer una superficie de deslizamiento cuya dinámica ideal garantice la convergencia de  $x_1$  a  $\theta$ . Por ejemplo:

$$\dot{x}_1 = -\lambda(x_1 - \theta) \quad \lambda > 0 \quad (31)$$

Luego, puede tomarse como superficie para el MD

$$\sigma_2(x) = \frac{1}{2}(1+x_1^2)x_2 + \lambda(x_1 - \theta) = 0 \quad (32)$$

En las simulaciones se ha considerado  $J=1$ ,  $\theta=1.5$ ,  $\lambda=1$ ,  $u_{min}=-1.5$  y  $u_{max}=1.5$ .

Primero, se considera el caso convencional sin planificación de trayectorias en el MA. La figura 1 muestra la superficie de deslizamiento  $\sigma_2$  (trazo grueso) y las trayectorias en el plano de estados para tres condiciones iniciales. Puede observarse que a diferencia de la trayectoria c, las trayectorias a y b, correspondientes a las condiciones iniciales (-1,3) y (-1,1.5), alcanzan la superficie  $\sigma_2=0$  en puntos donde no se establece el MD, atravesando la misma y operando nuevamente a lazo abierto.

La figura 2 muestra la evolución temporal de la variable controlada  $x_1(t)$  correspondiente a las trayectorias a y b indicadas en la figura 1. Tanto en la figura 1 como en la 2 se pone de manifiesto las consecuencias transitorias debidas a no haberse establecido el MD una vez alcanzada la superficie. Los tiempos indicados en la figura 2 corresponden a los instantes en que el sistema empieza a operar en MD. Cabe acotar que si bien no se han graficado trayectorias por encima de la correspondiente a la condición inicial (-1,1.5), las mismas dan lugar a sobrepasos excesivamente grandes e incluso a comportamientos inestables.

La evolución de las trayectorias a y b en el MA hacia puntos de la superficie donde no es posible la verificación de (23) puede atribuirse a un exceso de acción de control  $u_{max}$  en este modo de operación. La propuesta es dosificar la acción de control haciendo evolucionar al sistema a lo largo de una trayectoria planificada para la variable plana. El control de trayectoria a su vez es forzado por otro MD (sobre  $\sigma_1$ ),

de manera tal que el sistema opera en MD en todo instante, desde la condición inicial.

Para el presente ejemplo la salida plana coincide con el estado  $x_1(t)$ , pudiendo expresarse tanto los estados del sistema original como la acción de control como funciones diferenciales de la nueva salida:

$$x_1 = y \quad (33)$$

$$x_2 = \frac{2\dot{y}}{(1+y^2)} \quad (34)$$

$$u = Jy^{(2)} \quad (35)$$

A los efectos de la nueva propuesta, es necesario planificar una trayectoria que una dos puntos en el espacio de estados, correspondientes a la condición inicial y a un punto de la superficie en el cual se verifica (23). Existen funciones standard para tal finalidad, como las conocidas como curvas de Bezier o B-splinas. Sin embargo, la elección de una determinada trayectoria siempre está sujeta a la física de cada problema. Para el presente ejemplo, se propone como trayectoria la correspondiente a un tramo de exponencial definida por los dos puntos a unir. Luego, la trayectoria seleccionada para la variable plana es:

$$y_d = a - (a - x_1(t_0))e^{\alpha t} \quad (36)$$

siendo:

$$\alpha = \frac{\dot{y}(t_0) - \dot{y}_s}{y(t_0) - y_s} \quad (37)$$

$$a = y(t_0) - \frac{\dot{y}(t_0)}{\alpha} \quad (38)$$

$(y_s, \dot{y}_s)$  son las coordenadas de un punto del dominio del MD de la superficie  $\sigma_2$ .

El control del sistema en MA es realizado a partir de un lazo cerrado en MD sobre la superficie:

$$\sigma_1 = \dot{y} - \dot{y}_d + \delta(y - y_d) = 0 \quad (39)$$

la condición necesaria y suficiente para operar en MD sobre la superficie  $\sigma_1$  es:

$$u_{min} \leq u = Jy^{(2)} \leq u_{max}$$

Como puede observarse, a los efectos de la implementación de la estrategia propuesta, la única información adicional que se requiere es la

correspondiente a la de un punto de la superficie  $\sigma_2$  en el cual el MD puede establecerse.

La figura 3 muestra el comportamiento del sistema en el espacio de estado cuando se emplea la planificación de trayectoria en el MA. Las condiciones iniciales de las trayectorias son las mismas que las de la figura 1. Se aprecia que a través del seguimiento de la trayectoria planificada en el MA, la superficie  $\sigma_2$  es alcanzada en un punto donde puede establecerse el MD (a los efectos de la simulación se ha elegido el punto  $(x_1, x_2) = (.9, .663)$ , es decir  $(y_s, \dot{y}_s) = (.9, .6)$ ). Luego, el sistema opera siempre en modo deslizante, primero sobre la superficie correspondiente a la trayectoria planificada para el MA, y posteriormente sobre la superficie  $\sigma_2$ , en la cual se vuelcan las especificaciones de diseño referidas a dinámica, rechazo de perturbaciones, robustez a incertidumbres, máxima eficiencia, etc.

La figura 4 muestra las respuestas temporales correspondientes a las trayectorias a y b de la figura 3. En los periodos  $0 < t < 1.9$  (para la curva a) y  $0 < t < 4.31$  (para la curva b) las respuestas temporales son tramos de exponenciales que se corresponden con las trayectorias del plano de estado hasta el instante en que se alcanza la superficie  $\sigma_2$ . En el primer caso (curva a) resulta una exponencial con  $\alpha$  negativo, mientras que en el segundo caso  $\alpha$  es positivo. El valor y signo de  $\alpha$  resulta de la condición inicial.

La comparación de la figura 1 con la 3, y de la 2 con la 4 ponen en evidencia los beneficios de la propuesta realizada. Obviamente, la elección de otras funciones para la planificación de las variables planas puede redundar en una mejora adicional. No obstante, esto está asociado a la física de cada problema y excede el presente trabajo.

## 5. Conclusiones

Valores extremos de la acción de control aseguran alta robustez en sistemas operando en modo deslizante. Sin embargo, el exceso de control en el modo de aproximación puede dar lugar a comportamientos de muy baja performance cuando las trayectorias alcanzan la superficie de control en puntos en los cuales no se puede establecer el modo deslizante. Se propusieron conceptos de planificación de trayectorias para dosificar la acción de control durante el modo de aproximación. El seguimiento de trayectorias a través de un control por modo deslizante adicional asegura el comportamiento robusto desde la condición inicial. La estrategia propuesta permite ampliar considerablemente el rango de condiciones iniciales con comportamiento seguro.

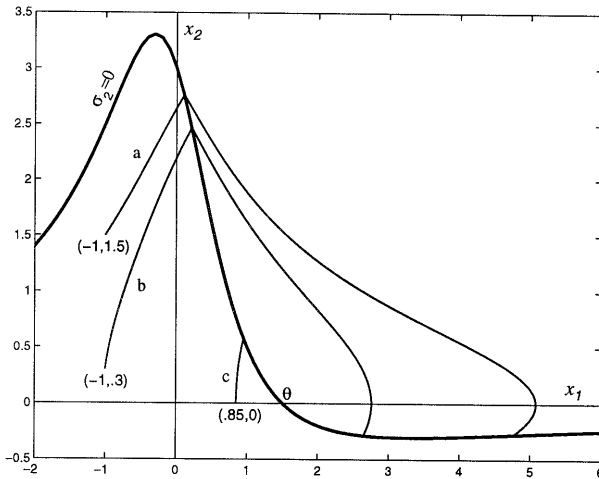


fig. 1. Control de estructura variable sin planificación del modo de aproximación

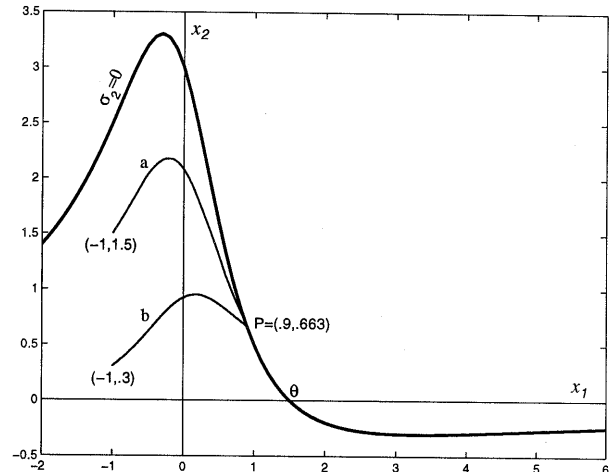


fig. 3. Control de estructura variable con planificación del modo de aproximación

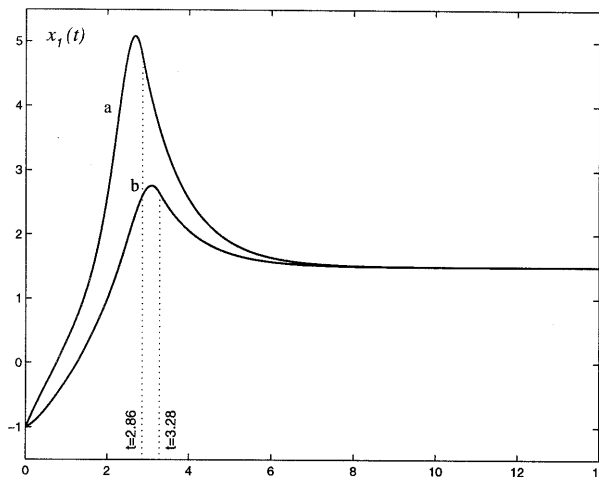


fig. 2. Respuestas temporales correspondientes a las trayectoria a y b de la fig.1

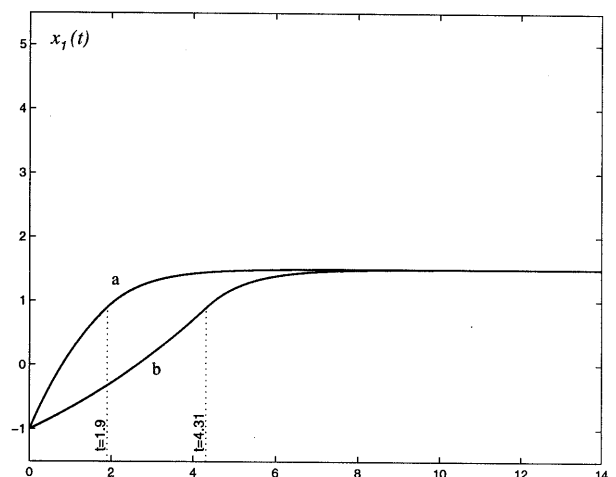


fig. 4. Respuestas temporales correspondientes a las trayectoria a y b de la fig.3

## Referencias

- Bühler, H., *Réglage par mode de glissement*. Presses Polytechniques Romandes. (1986).
- Fliess, M., Lévine J., Martin P. and Rouchon P., "Flatness and defect of non-linear systems: introductory theory and examples", *Int. J. Control*, 6, no 6, 1327-1361. (1995)
- Hung J. Y., Gao W., Hung J. C., "Variable Structure Control: A Survey". *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, 40, 2-22. (1993).
- Sira-Ramirez H., "Sliding motions in bilinear switched networks". *IEEE Trans.on Circuits and systems*, CAS-34, 919-933. (1987).
- Sira-Ramirez H., "On the sliding mode of multivariable nonlinear systems". *Int. J. Control*, 64, 4, 745-765. (1996).

- Sira-Ramirez, H. and Fliess, M., "Regulation of Non-minimum Phase Outputs in a PVTOL Aircraft", *Conference on Decision and Control*, Tampa, USA. December 13-15, (1998).
- Slotin J.J.E. and Li W. *Applied nonlinear control*. Prentice-Hall, New Jersey. (1991).
- Utkin V. Y., *Sliding Mode in Control and Optimization*. Springer-Verlag Berlin, New York. (1992).
- Utkin V. Y., Variable Structure Systems with Sliding Modes. *IEEE Trans.on Automatic Control*, AC-22, 212-222. (1977).
- Utkin V. Y., Sliding Mode Control Design Principles and Applications to Electric Drives. *IEEE Trans.on Industrial Electronics*, 40, 23-36. (1993).